



تمرین سری

تاریخ: زمستان ۱۴۰۱

تحویل: ۸ اسفندماه ساعت ۲۳/۵۹



دانشکده اقتصاد

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: دکتر کوثر یوسفی

تمرین‌های تحویلی اقتصاد کلان پیشرفته ۱

توضیح: بخش اعظم نمره به گویایی، تمیزی نوشتار، و بیان دقیق ساختارهای مدل‌سازی تعلق می‌گیرد. در ارائه‌ی پاسخ به سوالات اگر از قضیه و یا مساله‌ای که پیش‌تر حل شده است استفاده می‌کنید حتماً صورت دقیق آن را ذکر کنید. اگر مساله‌ای نیازمند محاسبه است، محاسبات را به‌طور کامل بنویسید.

سوال ۱. ساده. اقتصادی ایستا^۱ را در نظر بگیرید که در آن عوامل ترجیحات خود را با توجه تابع مطلوبیت زیر

$$u(c, \ell) = \alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell$$

به روی مصرف و استراحت برمی‌گزینند. تابع تکنولوژی تولید را به‌صورت

$$f(h) = zh^\beta, \quad \beta > 0$$

را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) نخست نشان دهید شرط $\alpha_c > 0$ و $\alpha_\ell > 0$ برای برقراری روابط

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \ell} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \ell^2} < 0$$

لازم و کافی هستند.

(ب) مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی را برای این اقتصاد نوشته و آن را برای پیدا کردن تخصیص‌های بهینه حل کنید.

(ج) اگر برنامه‌ریز مرکزی بخواهد به اندازه‌ی g از تولید را به یک کالای عمومی بجای کالای خصوصی c اختصاص دهد، مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی را دوباره بیان و برای تخصیص عنوان شده حل کنید. اگر امکان حل پارامتری مساله‌ی اخیر وجود نداشت، معادله‌ی نهایی را تنها به‌صورت ضمنی بیان کنید.

(د) تحلیل کنید افزایش β چه تاثیری روی تخصیص‌های بهینه در هر دو حالت (ب) و (ج) خواهد داشت.

سوال ۲. متوسط. رابینسون و اقتصاد بسته‌ی تک محصولی با نارگیل را به خاطر بیاورید. تابع مطلوبیت او از الگوی خطی

$$u(c, \ell) = c + \beta \ell, \quad \beta > 0$$

پیروی می‌کند. زندگی تنها در جزیره به او آموخته که اگر ℓ واحد زمان از روز را صرف استراحت و بقیه را برای یافتن و تهیه‌ی غذا کند می‌تواند به میزان $(1 - \ell)^\alpha$ واحد غذای مصرفی به دست آورد. این غذا در جزیره قابل نگهداری نیست و باید در روزی که به‌دست آمده مصرف شود. با این مفروضات به سوالات زیر پاسخ دهید.

¹Static economy

- آ) مسالهی هر روز رابینسون را به زبان ریاضی نوشته و میزان کارکرد بهینهی او را پیدا کنید. سپس میزان مصرف غذای بهینهی وی را یافته و استدلال کنید که چرا غذای اضافی باقی نمی ماند.
- ب) چنین فرض کنید که رابینسون امکان حیات بدون مصرف غذا را دارد! استدلال کنید که آیا تعادل بهینهی که منجر به عدم کار کردن وی باشد وجود دارد یا خیر. وجود یا عدم وجود چنین تعادلی را با حل مسالهی بیشینهی مطلوبیت نشان دهید.
- ج) فرض کنید کمینهی مصرف غذا در هر روز برای رابینسون برای ادامهی حیات مقدار $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ باشد. ضمن بیان دوبارهی مسالهی رابینسون، مقدار بهینهی کار او را به دست آورید.
- د) تاثیر تغییرات مثبت روی پارامتر β را بر میزان تخصیص های بهینهی رابینسون تحلیل کنید.

سوال ۳. متوسط. تابع مطلوبیت رابینسون را به صورت

$$U(c, \ell) = c^\beta \ell^{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) نخست نشان دهید تابع مطلوبیت در شرایط زیر صدق می کند.

$$\frac{\partial U}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \ell} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial c \partial \ell} \right)^2 \geq 0$$

- ب) اگر تکنولوژی تولید رابینسون با تابع $f(h) = Ah^\alpha$ باشد، پس از بیان مسالهی رابینسون به زبان ریاضی، تخصیص های بهینهی میزان کارکرد و استراحت او را بر حسب پارامترهای عنوان شده به دست آورید.
- ج) نشان دهید یک تبدیل هموار Γ^2 وجود دارد که تابع مطلوبیت مسالهی ۱ را به تابع مطلوبیت مسالهی ۳ نگاشت می کند، بدین معنی که

$$\Gamma(u) = U$$

- د) (*) نشان دهید تخصیص های بهینهی دو تابع مطلوبیت u_1 و u_2 با وجود نگاشت هموار Γ با ویژگی $\Gamma(u_1) = u_2$ همیشه برابر می باشند.

سوال ۴. سخت. در مدل اقتصاد کرزونه فرض کنید توابع مطلوبیت و تکنولوژی به صورت زیر باشند:

$$u(c, \ell) = \frac{c^{1-\sigma} + \ell^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad f(h) = Ah^\alpha$$

به سوالات زیر پاسخ دهید.

- آ) مسالهی برنامه ریز اجتماعی را برای این اقتصاد نوشته و آن را برای پیدا کردن تخصیص های بهینه حل کنید.
- ب) پیرامون وجود پاسخ های گوشه ای بحث کنید.
- ج) معادله ی اوایلر را نوشته و رابطه ی میان استراحت و کار را توصیف کنید.
- د) مقادیر بهینهی به دست آمده از قسمت آ را به صورت پارامتری بیان کنید.
- ه) رفتار حدی توابع مطلوبیت و تکنولوژی و هم چنین مقادیر بهینهی یافت شده را وقتی $\sigma \rightarrow 1$ را بیابید. بیان جزئیات ریاضی ضروری است.

²Smooth function